9

Goniometria e trigonometria

Nei primi cinque paragrafi di questo capitolo verranno richiamate le principali nozioni di *goniometria*[1], cioè verranno definite le principali *funzioni circolari* e saranno enunciate le loro proprietà; nell'ultimo paragrafo si tratterà la *trigonometria*[2], si enunceranno cioè alcune formule che mettono in relazione le misure dei lati di un triangolo con i valori delle funzioni goniometriche degli angoli del medesimo.

9.1 Goniometria: nozioni preliminari

Le funzioni circolari che verranno trattate in questo capitolo hanno come dominio l'insieme delle ampiezze degli angoli. Perciò, occorre aver chiaro, innanzitutto, il concetto di angolo.

Se in un piano si tracciano due semirette aventi l'origine in comune, il piano viene diviso in due parti, ciascuna delle quali viene chiamata *angolo*. Le due semirette vengono dette *lati* e, l'origine comune, *vertice* dei due angoli. Nella fig. 9.1 si rappresentano i due angoli α, β (gli angoli vengono spesso indicati utilizzando lettere greche) con vertice V e lati a, b.

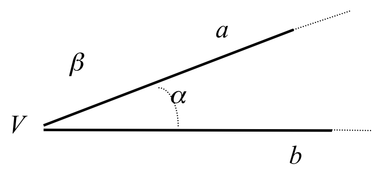


fig. 9.1

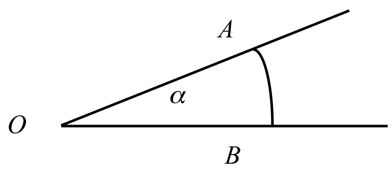


fig. 9.2

[1] La parola *goniometria* significa letteralmente misura degli angoli: deriva dal greco *gonía*, angolo, e *métron*, misura.
[2] La parola *trigonometria* significa letteralmente misura dei triangoli: deriva dal greco *trígonos*, triangolare, e *métron*, misura.

Inoltre risulterà vantaggioso considerare i vertici di questi angoli nel centro di una opportuna circonferenza, perciò si ritiene utile richiamare la seguente definizione.

Data una circonferenza avente il centro nel vertice di un angolo, si chiama *arco circolare* quella parte di circonferenza interna all'angolo e avente per estremi i punti di intersezione con i lati dell'angolo stesso (nella fig. 9.2 è rappresentato l'arco $\overset{\frown}{AB}$ di una circonferenza, corrispondente ad un angolo α; il punto O, vertice dell'angolo è il centro della circonferenza).

Per misurare l'ampiezza di un angolo, occorre fissare un'unità di misura: le più usate unità di misura per gli angoli sono il grado e il radiante.

Si chiama *grado* la 360^a parte dell'angolo giro. I suoi multipli sono il *minuto primo* (o semplicemente *primo*), che è un sessantesimo di grado, ed il *minuto secondo* (o semplicemente *secondo*) che è un sessantesimo di un primo.

Si dice *radiante* l'angolo al centro di una circonferenza, di raggio arbitrario, che sottende un arco di lunghezza uguale al raggio stesso (si tenga presente che se un angolo al centro di una circonferenza sottende un arco lungo quanto il raggio, ciò succede per ogni altra circonferenza concentrica con la prima). Ovviamente, se la lunghezza dell'arco sotteso è, ad esempio, metà di quella del raggio, l'angolo è di mezzo radiante; se è doppia di quella del raggio, l'angolo è di due radianti; e così via.

In generale, con *misura in radianti* di un angolo, si intende il rapporto tra la misura l dell'arco di circonferenza sotteso, espressa come multiplo del raggio, e il raggio r della stessa:

$$\text{misura di un angolo in radianti} = \frac{l}{r}\ .$$

Quindi, l'angolo giro, che sottende l'intera circonferenza (la cui lunghezza è 2π volte quella del raggio), misura 2π radianti:

$$\text{misura dell'angolo giro in radianti} = \frac{l}{r} = \frac{2\pi\ r}{r} = 2\pi\ .$$

Analogamente si ottiene che l'angolo piatto misura π radianti, che l'angolo retto misura $\frac{\pi}{2}$ radianti.

Per quanto concerne l'unità di misura degli archi circolari risulta conveniente assumere come unità l'arco il cui angolo al centro corrispondente è l'unità di misura degli angoli. Si ha così *l'arco grado*, che è l'arco di circonferenza che corrisponde all'angolo al centro di un grado, e l'*arco radiante*, che è l'arco di circonferenza che corrisponde all'angolo al centro di un radiante. Seguendo questa convenzione la misura di un arco di circonferenza e la misura del corrispondente angolo al centro sono espresse dallo stesso numero.

E' di importanza pratica sapere come si passa dalla misura di un angolo (o di un arco) in gradi, alla misura in radianti dello stesso angolo (o arco), e viceversa.

Indicando con $x°$ e x^r le misure, rispettivamente in gradi e in radianti, di uno stesso angolo (o arco) si ha:

(9.1) $$360° : 2\pi = x° : x^r\ .$$

Dalla (9.1) si ricavano le formule:

$$x^{r} = \frac{x°}{180°}\pi \tag{9.2}$$

$$x° = \frac{x^{r}}{\pi}180° \, . \tag{9.3}$$

La (9.2) fornisce la misura in radianti di un angolo x nota quella in gradi, mentre la (9.3) consente di determinare la misura in gradi conoscendo quella in radianti.

<u>Esempio 9.1</u>
L'angolo di 30° misura, in radianti:

$$x^{r} = \frac{30°}{180°}\pi = \frac{\pi}{6}$$

per la (9.2).

<u>Esempio 9.2</u>
L'angolo di $\frac{4}{3}\pi$ misura, in gradi:

$$x° = \frac{\frac{4}{3}\pi}{\pi}180° = 240°$$

per la (9.3).

<u>Esempio 9.3</u>
L'angolo di 25° misura, in radianti:

$$x^{r} = \frac{25°}{180°}\pi = \frac{5}{36}\pi$$

per la (9.2).

Per comodità del lettore, si riportano nella seguente tabella le misure in gradi e in radianti di alcuni di alcuni angoli particolari:

$x°$	0°	18°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
x^{r}	0	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

Tabella 1

E' spesso necessario attribuire ad un angolo un'orientazione.

Si dice *angolo orientato* quello i cui lati sono considerati in un certo ordine. In tal caso l'angolo può essere pensato come generato dalla rotazione del primo lato (lato origine) verso il secondo (lato termine), fino alla sovrapposizione dei due.

Per convenzione, un angolo si dice *positivo* quando è descritto dal lato origine con una rotazione antioraria attorno al vertice; si dice *negativo* quando la suddetta rotazione è oraria. All'angolo positivo si associa la misura positiva, a quello negativo la misura negativa.

9.2 Funzioni circolari

Le funzioni nelle quali la variabile indipendente è un angolo (o un arco) vengono dette *goniometriche* o *circolari*. Per definire le funzioni circolari elementari risulta opportuno considerare fisso il lato origine degli angoli e variabile il secondo. Si considera inoltre ogni angolo α in un piano munito di un sistema di riferimento cartesiano xOy , in particolare il vertice di α si fa coincidere con O e il lato origine di α col semiasse positivo delle ascisse. Nella fig. 9.3 è rappresentato l'angolo orientato positivo α il cui primo lato è il semiasse positivo delle ascisse ed il secondo lato la semiretta a e una circonferenza con raggio r qualsiasi, centrata nell'origine O del sistema di riferimento: indicando con A e con P rispettivamente i punti di intersezione del primo e del secondo lato di α con la circonferenza, l'arco di circonferenza con estremi A e P è l'arco circolare associato ad α.

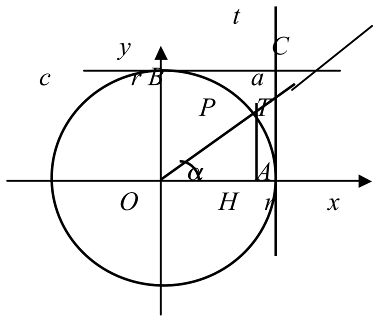


fig. 9.3

Come risulta chiaro osservando la fig. 9.3, ad ogni angolo α corrisponde uno ed un solo punto P intersezione della generatrice di α con la circonferenza di centro O e raggio r, punto che viene utilizzato nelle definizioni delle funzioni goniometriche.

Diremo (si faccia riferimento alla fig. 9.3):

seno dell'angolo orientato α , e lo indicheremo con senα, il rapporto tra l'ordinata del punto P, nel sistema di riferimento cartesiano xOy, e il raggio $OP = r$, cioè:

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{PH}{OP} = \frac{y_P}{r}\ ; \tag{9.4}$$

coseno dell'angolo orientato α , e lo indicheremo con cosα, il rapporto tra l'ascissa del punto P, nel sistema di riferimento cartesiano xOy, e il raggio $OP = r$, cioè:

(9.5) $$\cos\alpha = \frac{OH}{OP} = \frac{x_P}{r} \;;$$

tangente dell'angolo orientato α, e la indicheremo con tgα, il rapporto tra l'ordinata del punto T (intersezione della generatrice di α con la retta t tangente nel punto $A(r,0)$ alla circonferenza di centro O e raggio r) nel sistema di riferimento cartesiano xOy, e il raggio $OP = r$, cioè:

(9.6) $$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{AT}{OP} = \frac{y_T}{r} \;;$$

cotangente dell'angolo orientato α, e la indicheremo con cotgα, il rapporto tra l'ascissa del punto C (intersezione della generatrice di α con la retta c tangente nel punto $B(0,r)$ alla circonferenza di centro O e raggio r) nel sistema di riferimento cartesiano xOy, e il raggio $OP = r$, cioè:

(9.7) $$\mathrm{cotg}\,\alpha = \frac{BC}{OP} = \frac{x_C}{r} \;.$$

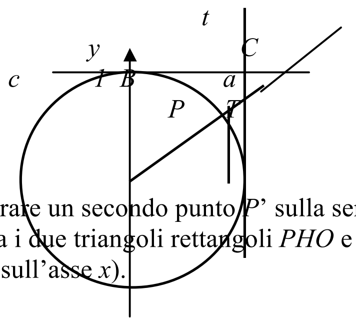
Si può dimostrare che i rapporti (9.4), (9.5), (9.6), (9.7) sono indipendenti dal raggio $OP = r$ della circonferenza che si considera[3], cioè dipendono solo dall'ampiezza dell'angolo α. Pertanto è conveniente considerare il valore più semplice del raggio, cioè $r = 1$, per semplificare le definizioni sopra esposte di *seno*, *coseno*, *tangente*, *cotangente*.

Si dice *circonferenza goniometrica* la circonferenza con centro nell'origine O del piano cartesiano e con raggio unitario, cioè la circonferenza di equazione:

(9.8) $$x^2 + y^2 = 1$$

rappresentata in fig. 9.4.

Il senso positivo di percorrenza sulla circonferenza è, convenzionalmente, quello antiorario.



[3] A tale scopo basta considerare un secondo punto P' sulla semiretta a, in fig. 9.3, e servirsi della similitudine tra i due triangoli rettangoli PHO e $P'H'O$ (dove H' è la proiezione ortogonale di P' sull'asse x).

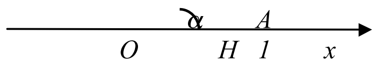


Fig. 9.4

Utilizzando la circonferenza goniometrica, le definizioni delle funzioni seno, coseno, tangente e cotangente fornite dalle (9.4), (9.5), (9.6), (9.7), si semplificano nelle (9.9), (9.10), (9.11), (9.12) seguenti (visto che $OP = r = 1$).

Diremo (si faccia riferimento alla fig. 9.4):

seno dell'angolo orientato α , e lo indicheremo con senα, l'ordinata del punto *P*, nel sistema di riferimento cartesiano *xOy*, cioè:

(9.9) $\quad \operatorname{sen}\alpha = PH = y_P$;

coseno dell'angolo orientato α , e lo indicheremo con cosα, l'ascissa del punto *P*, nel sistema di riferimento cartesiano *xOy*, cioè:

(9.10) $\quad \cos\alpha = OH = x_P$;

tangente dell'angolo orientato α , e la indicheremo con tgα, l'ordinata del punto *T* (intersezione della generatrice di α con la retta *t* tangente nel punto *A*(1,0) alla circonferenza goniometrica) nel sistema di riferimento cartesiano *xOy*, cioè:

(9.11) $\quad \operatorname{tg}\alpha = AT = y_T$;

cotangente dell'angolo orientato α , e la indicheremo con cotgα, l'ascissa del punto *C* (intersezione della generatrice di α con la retta *c* tangente nel punto *B*(0,1) alla circonferenza goniometrica) nel sistema di riferimento cartesiano *xOy*, cioè:

(9.12) $\quad \operatorname{cotg}\alpha = BC = x_C$

Dunque il punto *P* in fig. 9.4, ha le seguenti coordinate:

$$P\,(\cos\alpha\,,\ \operatorname{sen}\alpha)$$

che verificano l'equazione (9.8), visto che *P* appartiene alla circonferenza goniometrica, cioè si ha:

(9.13) $\quad \operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

pertanto la somma dei quadrati del seno e del coseno di uno stesso angolo (qualsiasi) α è uguale a 1 (la (9.13) può essere dimostrata anche applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo *OPH* in fig. 9.4).

La (9.13) si dice *identità fondamentale della goniometria*: essa consente di determinare il seno (coseno) di un angolo α conoscendo il suo coseno (seno) e il quadrante in cui si trova il punto *P* associato all'angolo α, infatti dalla (9.13) si ottengono le seguenti:

(9.14) $\quad \operatorname{sen}\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$

(9.15) $\quad \cos\alpha = \pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}$.

Il lettore noti che le radici che compaiono nelle (9.14), (9.15) sono reali: infatti il punto *P* si muove sulla circonferenza goniometrica e quindi le sue coordinate $\cos\alpha$ e $\operatorname{sen}\alpha$ verificano le seguenti disuguaglianze:

(9.16) $$-1 \le \operatorname{sen}\alpha \le 1$$

(9.17) $$-1 \le \cos\alpha \le 1$$

(per comprenderle si veda il paragrafo 9.3) che assicurano la non negatività dei due radicandi.

Si considerino i triangoli *OHP* e *OAT* in fig. 9.4: questi sono simili, avendo i tre angoli uguali, quindi vale la seguente proporzione tra i cateti dei due triangoli:

$$OH : OA = HP : AT$$

da cui, essendo $OA = 1$ (in quanto raggio della circonferenza goniometrica) e utilizzando le (9.9), (9.10), (9.11), si ha:

$$\cos\alpha : 1 = \operatorname{sen}\alpha : \operatorname{tg}\alpha$$

e quindi

(9.18) $$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}.$$

La (9.18) fornisce il legame tra le tre funzioni circolari seno, coseno, tangente, ed è definita solo per i valori di α che non annullano il coseno che compare al denominatore (si veda a questo proposito il paragrafo 9.3).

Si considerino ora i simili triangoli *BCO* e *OPH* (fig. 9.4). I cateti di tali triangoli soddisfano la seguente proporzione:

$$BO : PH = BC : OH$$

da cui, essendo $BO = 1$ (in quanto raggio della circonferenza goniometrica) e utilizzando le (9.9), (9.10), (9.12), si ha:

$$1 : \operatorname{sen}\alpha = \operatorname{cotg}\alpha : \cos\alpha$$

e quindi

(9.19) $$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}.$$

La (9.19) fornisce il legame tra le tre funzioni circolari seno, coseno, cotangente, ed è definita solo per i valori di α che non annullano il seno che compare al denominatore (si veda a questo proposito il paragrafo 9.3).

Infine, dalle (9.18) e (9.19), si deduce la seguente:

(9.20) $$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

9.3 Variazione delle funzioni circolari: grafici e proprietà

Ruotando la semiretta *a*, in fig. 9.4, attorno all'origine *O*, si deducono le seguenti proprietà del seno dell'angolo orientato α, formato da *a* e dal semiasse positivo delle *x*:

- $\text{sen } 0° = \text{sen } 0 = 0$;
- al crescere di α da 0° a 90° il seno cresce da 0 a 1, cioè:

$$\text{per} \quad 0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2} \quad \text{si ha} \quad 0 \le \text{sen}\,\alpha \le 1;$$

- $\text{sen } 90° = \text{sen } \frac{\pi}{2} = 1$;
- al crescere di α da 90° a 180° il seno decresce da 1 a 0, cioè:

$$\text{per} \quad \frac{\pi}{2} \le \alpha \le \pi \quad \text{si ha} \quad 1 \ge \text{sen}\,\alpha \ge 0;$$

- $\text{sen } 180° = \text{sen } \pi = 0$;
- al crescere di α da 180° a 270° il seno decresce da 0 a -1, cioè:

$$\text{per} \quad \pi \le \alpha \le \frac{3}{2}\pi \quad \text{si ha} \quad 0 \ge \text{sen}\,\alpha \ge -1;$$

- $\text{sen } 270° = \text{sen } \frac{3}{2}\pi = -1$;
- al crescere di α da 270° a 360° il seno cresce da -1 a 0, cioè:

$$\text{per} \quad \frac{3}{2}\pi \le \alpha \le 2\pi \quad \text{si ha} \quad -1 \le \text{sen}\,\alpha \le 0;$$

- $\text{sen } 360° = \text{sen } 2\pi = 0$.

Per quanto riguarda il coseno si ha:

- $\cos 0° = \cos 0 = 1$;
- al crescere di α da 0° a 90° il coseno decresce da 1 a 0, cioè:

$$\text{per} \quad 0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2} \quad \text{si ha} \quad 1 \ge \cos\alpha \ge 0;$$

- $\cos 90° = \cos \frac{\pi}{2} = 0$;
- al crescere di α da 90° a 180° il coseno decresce da 0 a -1, cioè:

$$\text{per} \quad \frac{\pi}{2} \le \alpha \le \pi \quad \text{si ha} \quad 0 \ge \cos\alpha \ge -1;$$

- $\cos 180° = \cos \pi = -1$;
- al crescere di α da 180° a 270° il coseno cresce da -1 a 0, cioè:

$$\text{per} \quad \pi \le \alpha \le \frac{3}{2}\pi \quad \text{si ha} \quad -1 \le \cos\alpha \le 0;$$

- $\cos 270° = \cos \frac{3}{2}\pi = 0$;
- al crescere di α da 270° a 360° il coseno cresce da 0 a 1, cioè:

$$\text{per} \quad \frac{3}{2}\pi \leq \alpha \leq 2\pi \ \text{ si ha } \ 0 \leq \cos\alpha \leq 1;$$

- $\cos 360° = \cos 2\pi = 1$.

Al crescere di α oltre i 360°, la semiretta a, torna ad assumere, ad ogni giro successivo attorno all'origine O, le medesime posizioni assunte nel primo giro; ne consegue che senα e cosα riprendono periodicamente gli stessi valori assunti nell'intervallo da 0° a 360°: le funzioni seno e coseno sono cioè periodiche di periodo T = 360° = 2π, quindi:

$$\text{sen}(\alpha + k360°) = \text{sen}(\alpha + 2k\pi) = \text{sen}\,\alpha$$

$$\cos(\alpha + k360°) = \cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha$$

dove k è un qualunque numero intero.

Pertanto, come già osservato nel paragrafo 9.2, il seno e il coseno assumono, al variare dell'angolo α, tutti e soli i valori reali compresi tra -1 e 1, cioè valgono le disuguaglianze (9.14) e (9.15), che possono essere espresse anche nel modo seguente, utilizzando il valore assoluto:

$$|\text{sen}\,\alpha| \leq 1 \quad \text{e} \quad |\cos\alpha| \leq 1$$

il che significa che le funzioni seno e coseno sono limitate.

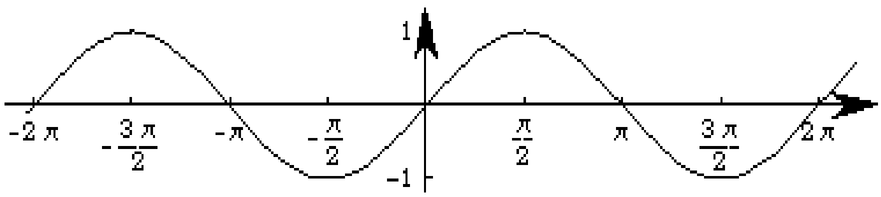


fig. 9.5

Il grafico di y = sen x, detto *sinusoide*, riportato in fig. 9.5, riassume le principali proprietà della funzione:

- il suo dominio è **R** ;
- è limitata, e la sua immagine è l'intervallo chiuso e limitato di estremi -1 e 1: *Imf* = [-1,1];
- è periodica di periodo 2π;
- è dispari, cioè simmetrica rispetto all'origine O del sistema di riferimento cartesiano, in quanto si ha: sen(- x) = - sen x;
- si annulla per $x = k\pi$, con k numero intero qualsiasi;
- è positiva in $]0,\pi[$, negativa in $]\pi, 2\pi[$ e negli intervalli che si ottengono considerando la periodicità;
- è decrescente in $[\pi/2, 3\pi/2]$, crescente in $[0,\pi/2]$ e in $[3\pi/2, 2\pi]$ e negli intervalli che si ottengono considerando la periodicità.

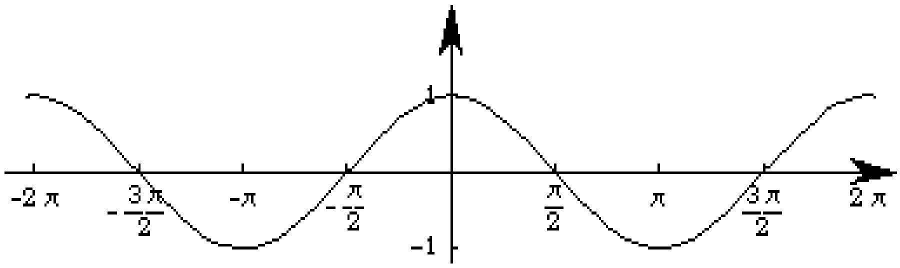


fig. 9.6

Il grafico di $y = \cos x$, detto *cosinusoide*, riportato in fig. 9.6, riassume le principali proprietà della funzione:
- il suo dominio è **R**;
- è limitata, e la sua immagine è l'intervallo chiuso e limitato di estremi -1 e 1: *Imf* = [-1,1];
- è periodica di periodo 2π;
- è pari, cioè simmetrica rispetto all'asse y del sistema di riferimento cartesiano, in quanto si ha: $\cos(-x) = \cos x$;
- si annulla per $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ con k numero intero qualsiasi;
- è positiva in $]0,\pi/2[$ e $]3\pi/2, 2\pi[$, negativa in $]\pi/2, 3\pi/2[$ e negli intervalli che si ottengono considerando la periodicità;
- è decrescente in $[0, \pi]$, crescente in $[\pi, 2\pi]$ e negli intervalli che si ottengono considerando la periodicità.

Dalla fig. 9.4, al variare dell'angolo α descritto dalla semiretta a che ruota attorno all'origine O, si deducono le seguenti proprietà della tangente di un angolo orientato α:
- tg 0° = tg 0 = 0;
- al crescere di α da 0° a 90° il punto T si allontana sempre di più da A verso l'alto e per $\alpha = 90°$ la semiretta a e la retta tangente t sono parallele; ne consegue che al crescere di α da 0° a 90° la tangente cresce, senza nessuna limitazione, tendendo a $+\infty$; ciò si può indicare nel modo seguente:

$$\text{per } \alpha \to 90° \quad (\text{con } \alpha < 90°) \qquad \text{tg}\alpha \to +\infty,$$

e allora la $\text{tg}\frac{\pi}{2}$ non è un numero reale, da cui segue che $\frac{\pi}{2}$ non appartiene al dominio della funzione tangente;
- al crescere di α da 90° a 180° la semiretta a non interseca la retta tangente t; si considera allora l'intersezione di t con la semiretta a' opposta ad a, che si trova nel quarto quadrante: la tangente di α risulta pertanto negativa e tanto più grande in valore assoluto quanto più α è prossimo a 90°; ciò si può indicare nel modo seguente:

$$\text{per } \alpha \to 90° \quad (\text{con } \alpha > 90°) \qquad \text{tg}\alpha \to -\infty;$$

- tg 180° = tg π = 0;
- quando l'angolo α cresce da 180° a 270° la tangente risulta positiva e riprende i valori assunti per α compreso tra 0° e 90°; analogamente, per α compreso tra 270° e 360° la tangente riprende i valori assunti per α tra 90° e 180°; si dirà quindi che la tangente è una funzione periodica di periodo 180° (o π) e si scriverà

$$\text{tg}\,(\alpha + k\,180°) = \text{tg}\,(\alpha + k\pi) = \text{tg}\,\alpha$$

dove k è un qualunque numero intero;
- la tangente di un angolo orientato α, al variare dell'angolo, può assumere qualunque valore reale: cioè varia da $-\infty$ a $+\infty$.

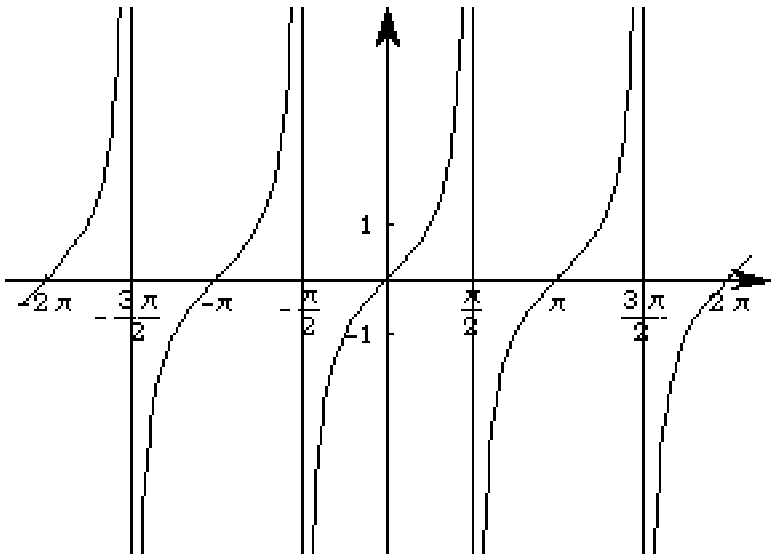


fig. 9.7

Il grafico di y = tg x, detto *tangentoide*, riportato in fig. 9.7, riassume le principali proprietà della funzione:
- il suo dominio è $\mathbf{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \;/\; k \in \mathbf{Z} \right\}$;
- non è limitata, infatti la sua immagine è tutto $\mathbf{R}$, pertanto è una funzione suriettiva;
- è periodica di periodo π;
- è dispari, cioè simmetrica rispetto all'origine O del sistema di riferimento cartesiano, in quanto si ha: tg($-x$) = - tg x;
- si annulla per $x = k\pi$, con k numero intero qualsiasi (il fatto che gli zeri della tangentoide siano gli stessi della sinusoide si deduce dalla (9.16));
- è negativa in $]-\pi/2,0[$, positiva in $]0,\pi/2[$ e negli intervalli che si ottengono considerando la periodicità;

- è sempre crescente nel suo dominio naturale.

Lo studio della variazione della cotangente di un angolo orientato α è del tutto analogo a quello descritto per la tangente; lo si lascia pertanto, come esercizio, al lettore. Nella fig. 9.8 è riportata la *cotangentoide*, rappresentazione grafica della funzione $y = \operatorname{cotg} x$.

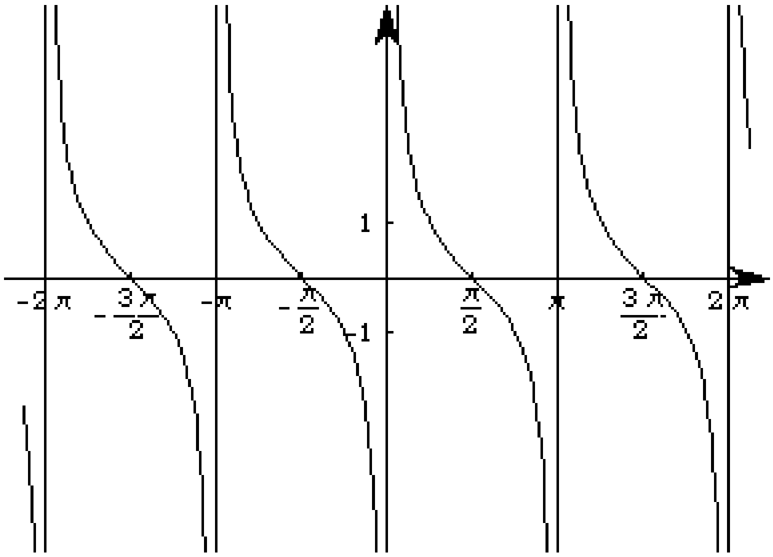


Fig. 9.8

Si termina il paragrafo indicando i valori delle funzioni circolari per alcuni angoli particolari. Viene tralasciato il loro calcolo, si fornisce solamente la tabella 2.

Angolo	Seno	Coseno	Tangente	Cotangente
0	0	1	0	non esiste
$\frac{\pi}{12}=15°$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6}-$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{10}=18°$	$\frac{1}{4}(\sqrt{5}-$	$\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$	$\frac{1}{5}\sqrt{25-10\sqrt{5}}$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$
22°30’	$\frac{1}{2}\sqrt{2-}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$	$\sqrt{2}-1$	$\sqrt{2}+1$
$\frac{\pi}{6}=30°$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{5}=36°$	$\frac{1}{4}\sqrt{10-}$	$\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$	$\frac{1}{5}\sqrt{25+10\sqrt{5}}$
$\frac{\pi}{4}=45°$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$\frac{3\pi}{10}=54°$	$\frac{1}{4}(\sqrt{5}+$	$\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$	$\sqrt{1+\frac{2}{5}\sqrt{5}}$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$
$\frac{\pi}{3}=60°$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
67°30’	$\frac{1}{2}\sqrt{2+}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$	$\sqrt{2}+1$	$\sqrt{2}-1$
$\frac{2\pi}{5}=72°$	$\frac{1}{4}\sqrt{10+}$	$\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$	$\frac{1}{5}\sqrt{25-10\sqrt{5}}$
$\frac{5\pi}{12}=75°$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6}+$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$	$2+\sqrt{3}$	$2-\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}=90°$	1	0	non esiste	0

Tabella 2

9.4 Formule goniometriche fondamentali

Si riportano in questo paragrafo le più importanti formule goniometriche.

Funzioni goniometriche per archi associati

Vengono chiamati *associati* gli angoli (o archi) delle seguenti coppie:

α e $\frac{\pi}{2}-\alpha$ (sono complementari)

α e $\frac{\pi}{2}+\alpha$ (differiscono di un angolo retto)

α e $\pi-\alpha$ (sono supplementari)

α e $\pi+\alpha$ (differiscono di un angolo piatto)

α e $\frac{3}{2}\pi-\alpha$ (hanno per somma tre angoli retti)

α e $\frac{3}{2}\pi+\alpha$ (differiscono di tre angoli retti)

α e $2\pi-\alpha$ (hanno per somma un angolo giro: si dicono esplementari)

α e $-\alpha$ (sono opposti)

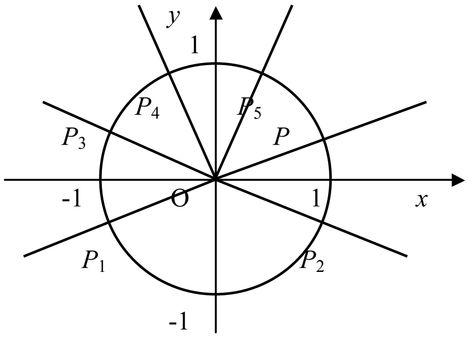
Nelle considerazioni che seguono consideriamo la corrispondenza tra angoli e punti sulla circonferenza goniometrica (descritta nel paragrafo 9.2).

Sia P un punto corrispondente all'angolo α . Si consideri poi l'angolo $\alpha+\pi$: il punto della circonferenza goniometrica associato a tale angolo, che indicheremo con P_1 , è ottenuto percorrendo, a partire da P, una semicirconferenza goniometrica in senso antiorario (si veda la fig. 9.8). P_1 è dunque simmetrico di P rispetto all'origine O del sistema di riferimento cartesiano, per cui tali punti hanno ordinate e ascisse opposte, ossia valgono le seguenti:

(9.21) $\cos(\alpha+\pi)=-\cos\alpha \qquad \operatorname{sen}(\alpha+\pi)=-\operatorname{sen}\alpha$

Il punto corrispondente all'angolo $-\alpha$ si ottiene descrivendo, a partire da P, un arco congruente a quello relativo all'angolo α, ma in senso antiorario: indicando con P_2 tale punto, si ha che P e P_2 risultano simmetrici rispetto all'asse x, quindi hanno la stessa ascissa e ordinate opposte (si veda la fig. 9.9), cioè:

(9.22) $\cos(-\alpha)=\cos(2\pi-\alpha)=\cos\alpha \qquad \operatorname{sen}(-\alpha)=\operatorname{sen}(2\pi-\alpha)=\operatorname{sen}\alpha$.



P_1 (cosα , senα), P_2 (cosα , - senα), P_3 (- cosα , senα),
P_4 (- senα , cosα), P_5 (senα , cosα).

fig. 9.9

Si consideri ora l'angolo $\pi-\alpha$: il punto ad esso corrispondente, che indicheremo con P_3 , si ottiene percorrendo, a partire da P_2 , una semicirconferenza. Quindi P_2 e P_3 risultano simmetrici rispetto all'origine O (hanno dunque ascisse e ordinate opposte), inoltre P_3 e P sono simmetrici rispetto all'asse y (hanno dunque la stessa ordinata e ascisse opposte). Pertanto valgono le relazioni:

(9.23) $$\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha \qquad \operatorname{sen}(\pi-\alpha) = \operatorname{sen}\alpha\,.$$

Siano ora P_4 il punto corrispondente all'angolo $\alpha + \pi/2$ e P_5 quello corrispondente all'angolo $\pi/2 - \alpha$. Poiché è facile verificare (basta considerare la congruenza tra opportuni triangoli rettangoli) che se P ha coordinate (a,b), allora le coordinate di P_5 sono (b, a) e quelle di P_4 sono $(- b, a)$, valgono le seguenti formule:

(9.24) $$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\operatorname{sen}\alpha \qquad \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \cos\alpha$$

(9.25) $$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \operatorname{sen}\alpha \qquad \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha\,.$$

Procedendo in modo analogo si determinano le relazioni che intercorrono tra le funzioni goniometriche seno, coseno, tangente, cotangente, anche di tutte le altre coppie di angoli associati. Ne viene lasciata la deduzione al lettore e ci si limita a riportare l'elenco completo di tutte le formule relative agli angoli associati.

Angoli complementari

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{sen}\alpha$$
$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{cotg}\alpha$$
$$\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{tg}\alpha$$

Angoli che differiscono di un angolo retto

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\operatorname{sen}\alpha$$
$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\operatorname{cotg}\alpha$$
$$\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\operatorname{tg}\alpha$$

Angoli supplementari

$$\operatorname{sen}(\pi-\alpha)=\operatorname{sen}\alpha$$
$$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$$
$$\operatorname{tg}(\pi-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha$$
$$\operatorname{cotg}(\pi-\alpha)=-\operatorname{cotg}\alpha$$

Angoli che differiscono di un angolo piatto

$$\operatorname{sen}(\pi+\alpha)=-\operatorname{sen}\alpha$$
$$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$$
$$\operatorname{tg}(\pi+\alpha)=\operatorname{tg}\alpha$$
$$\operatorname{cotg}(\pi+\alpha)=\operatorname{cotg}\alpha$$

Angoli che hanno per somma tre angoli retti

$$\operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)=-\cos\alpha \qquad \cos\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)=-\operatorname{sen}\alpha$$
$$\operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)=\operatorname{cotg}\alpha \qquad \operatorname{cotg}\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)=\operatorname{tg}\alpha$$

Angoli che differiscono di tre angoli retti

$$\operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)=-\cos\alpha \qquad \cos\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)=\operatorname{sen}\alpha$$
$$\operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)=-\operatorname{cotg}\alpha \qquad \operatorname{cotg}\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)=-\operatorname{tg}\alpha$$

Angoli esplementari

$$\operatorname{sen}(2\pi-\alpha)=-\operatorname{sen}\alpha$$
$$\cos(2\pi-\alpha)=\cos\alpha$$
$$\operatorname{tg}(2\pi-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha$$
$$\operatorname{cotg}(2\pi-\alpha)=-\operatorname{cotg}\alpha$$

Angoli opposti

$$\operatorname{sen}(-\alpha)=-\operatorname{sen}\alpha$$
$$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$$
$$\operatorname{tg}(-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha$$
$$\operatorname{cotg}(-\alpha)=-\operatorname{cotg}\alpha$$

Formule di addizione e sottrazione

E' immediato constatare che le funzioni circolari non soddisfano la proprietà di linearità, cioè:

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) \neq \operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta .$$

Infatti basta considerare $\alpha = \beta = \frac{\pi}{4}$ in corrispondenza ai quali si ha: $\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1$, mentre $\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$. Analoghe considerazioni valgono per il coseno.

Da ciò segue la necessità di trovare delle formule che permettano di determinare $sen(\alpha \pm \beta), \cos(\alpha \pm \beta), \operatorname{tg}(\alpha \pm \beta), \cot\operatorname{g}(\alpha \pm \beta)$, conoscendo le funzioni goniometriche degli angoli α e β.

Valgono le seguenti uguaglianze (si tralasciano i calcoli che consentono di ottenerle), dette formule di *addizione* e *sottrazione*:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta \\
&\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta \\
&\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \\
&\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \\
&\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} \\
&\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} \\
&\operatorname{co\,tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{co\,tg}\alpha\operatorname{co\,tg}\beta - 1}{\operatorname{co\,tg}\beta + \operatorname{co\,tg}\alpha} \\
&\operatorname{co\,tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{co\,tg}\alpha\operatorname{co\,tg}\beta + 1}{\operatorname{co\,tg}\beta - \operatorname{co\,tg}\alpha}
\end{aligned} \tag{9.26}$$

che consentono di esprimere il seno o il coseno della somma algebrica di due angoli, tramite il seno e il coseno dei singoli addendi, oppure la tangente (cotangente) della somma algebrica di due angoli, tramite la tangente (cotangente) dei singoli addendi.

Formule di duplicazione

Il lettore noti che, in generale, si ha che:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{sen} 2\alpha \neq 2\operatorname{sen}\alpha \\
&\cos 2\alpha \neq 2\cos\alpha \\
&\operatorname{tg} 2\alpha \neq 2\operatorname{tg}\alpha \\
&\operatorname{cotg} 2\alpha \neq 2\operatorname{cotg}\alpha.
\end{aligned}$$

Valgono le seguenti formule, dette di *duplicazione*, che permettono di esprimere il seno, il coseno, la tangente e la cotangente dell'angolo doppio, in funzione delle funzioni goniometriche dell'angolo singolo (tali formule si possono ottenere dalle (9.26) relative alla somma, ponendo $\beta = \alpha$):

$$\mathrm{sen}2\alpha = 2\mathrm{sen}\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \begin{cases} \cos^2\alpha - sen^2\alpha \\ 1 - 2sen^2\alpha \\ 2\cos^2\alpha - 1 \end{cases}$$

$$\mathrm{tg}\,2\alpha = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\,\alpha} \quad \text{con } \alpha \neq \pi + 2k\pi \quad \text{e } \alpha \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$$

$$\mathrm{cotg}2\alpha = \frac{\mathrm{cotg}^2\alpha - 1}{2\mathrm{cotg}\alpha} \text{ con } \alpha \neq k\frac{\pi}{2}.$$

Formule di bisezione

Le seguenti formule, dette di *bisezione*, che permettono di esprimere il seno, il coseno, la tangente e al cotangente dell'angolo metà, in funzione del coseno dell'intero angolo, si possono ricavare con alcuni semplici calcoli (lasciati per esercizio al lettore) dalle formule di duplicazione del coseno:

$$sen\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \qquad \begin{cases} + \text{ se } \frac{\alpha}{2} \text{ è nel 1° o nel 2° quadrante} \\ - \text{ se } \frac{\alpha}{2} \text{ è nel 3° o nel 4° quadrante} \end{cases}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \qquad \begin{cases} + \text{ se } \frac{\alpha}{2} \text{ è nel 1° o nel 4° quadrante} \\ - \text{ se } \frac{\alpha}{2} \text{ è nel 2° o nel 3° quadrante} \end{cases}$$

$$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} \quad \text{per } \alpha \neq \pi + 2\mathrm{k}\pi \qquad \begin{cases} + \text{ se } \frac{\alpha}{2} \text{ è nel 1° o nel 3° quadrante} \\ - \text{ se } \frac{\alpha}{2} \text{ è nel 2° o nel 4° quadrante} \end{cases}$$

$$\mathrm{co\,tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} \quad \text{per } \alpha \neq 2\mathrm{k}\pi \qquad \begin{cases} + \text{ se } \frac{\alpha}{2} \text{ è nel 1° o nel 4° quadrante} \\ - \text{ se } \frac{\alpha}{2} \text{ è nel 2° o nel 3° quadrante} \end{cases}$$

Formule di Werner e di prostaferesi

Nella pratica dei calcoli si presentano spesso due esigenze: la prima è quella di scrivere il prodotto di funzioni circolari come somma, l'altra è quella inversa di trasformare una somma in un prodotto.

Al primo scopo rispondono le *formule di Werner*:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}\alpha \cos\beta &= \frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}(\alpha+\beta)+\operatorname{sen}(\alpha-\beta)\right)\\
\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta &= \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right)\\
\cos\alpha \cos\beta &= \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right)
\end{aligned}\tag{9.27}$$

che sono ottenute da quelle di somma e di differenza. Per verificare la prima, ad esempio, è sufficiente considerare le formule di somma e di differenza per il seno:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(\alpha+\beta) &= \operatorname{sen}\alpha \cos\beta + \cos\alpha \operatorname{sen}\beta\\
\operatorname{sen}(\alpha-\beta) &= \operatorname{sen}\alpha \cos\beta - \cos\alpha \operatorname{sen}\beta
\end{aligned},$$

sommarle membro a membro:

$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta)+\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = 2\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta$$

da cui, dividendo entrambi i membri per due, si ha la prima delle (9.27). La verifica delle ultime due formule (9.27), simile a quella della prima, viene lasciata per esercizio al lettore.

Se nelle (9.27) e nella formula analoga per l'espressione $\cos\alpha \operatorname{sen}\beta$ si pone:

$$\alpha = \frac{p+q}{2}\ , \quad \beta = \frac{p-q}{2}$$

e quindi:

$$\alpha+\beta = p\ , \quad \alpha-\beta = q$$

si ottengono le *formule di prostaferesi*[4]:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} p + \operatorname{sen} q &= 2\operatorname{sen}\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}\\
\operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q &= 2\cos\frac{p+q}{2}\operatorname{sen}\frac{p-q}{2}\\
\cos p + \cos q &= 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}\\
\cos p - \cos q &= -2\operatorname{sen}\frac{p+q}{2}\operatorname{sen}\frac{p-q}{2}
\end{aligned}\tag{9.28}$$

che rispondono al secondo scopo sopra citato.

[4] La parola "*prostaferesi*" deriva da due voci greche che significano "*addizione*" e "*sottrazione*". Le formule con questo nome permettono di trasformare la somma o la differenza di due seni, di due coseni, di due tangenti, in prodotti o quozienti di seni e coseni.

Per ottenere le formule di prostaferesi per le tangenti si procede come segue:

$$\operatorname{tg} p \pm \operatorname{tg} q = \frac{\operatorname{sen} p}{\cos p} \pm \frac{\operatorname{sen} q}{\cos q} = \frac{\operatorname{sen} p \cos q \pm \operatorname{sen} q \cos p}{\cos p \cos q} = \frac{\operatorname{sen}(p \pm q)}{\cos p \cos q}$$

e dunque:

$$\operatorname{tg} p \pm \operatorname{tg} q = \frac{\operatorname{sen}(p \pm q)}{\cos p \cos q} \quad \text{con} \quad p, q \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \forall k \in \mathbf{Z}.$$

In modo analogo si ottengono le formule di prostaferesi per la cotangente:

$$\operatorname{co\,tg} p \pm \operatorname{co\,tg} q = \frac{\operatorname{sen}(q \pm p)}{\operatorname{sen} p \operatorname{sen} q} \quad \text{con} \quad p, q \neq k\pi \quad \forall k \in \mathbf{Z}.$$

Formule parametriche

Le seguenti formule, dette *formule parametriche*, consentono di esprimere $\operatorname{sen}\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{cotg}\alpha$ in funzione di una stessa funzione circolare: la tangente dell'angolo metà, cioè $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

$$(9.29)\quad \operatorname{sen}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}; \quad \cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}; \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}; \quad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$$

Tali formule si ricavano da quelle di duplicazione relative al seno e al coseno, riscritte per α e $\frac{\alpha}{2}$, cioè dalle seguenti:

$$(9.30)\qquad \operatorname{sen}\alpha = 2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} \qquad \text{e} \qquad \cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}.$$

Basta riscrivere le (9.30), utilizzando l'identità (9.13) relativa all'angolo $\frac{\alpha}{2}$, nel modo seguente:

$$(9.31)\qquad \operatorname{sen}\alpha = \frac{2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}} \qquad \text{e} \qquad \cos\alpha = \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}}$$

e dividere numeratore e denominatore dei secondi membri delle (9.31) per $\cos^2\frac{\alpha}{2}$ (supponendo ovviamente che $\cos\frac{\alpha}{2} \neq 0$ e pertanto $\alpha \neq \pi + 2k\pi$, con k numero intero qualsiasi) considerando la (9.18). Per ottenere poi la formula (9.29) relativa alla tangente (che ha significato solo se $\alpha \neq \pi/2 + k\pi$), basta dividere, termine a termine, quelle relative al seno e al coseno, e servirsi della (9.18). In modo analogo si ottiene la formula (9.29) relativa alla cotangente (che ha significato solo se $\alpha \neq k\pi$).

9.5 Funzioni circolari inverse

Nel paragrafo 1.11 (capitolo 1) relativo all'inversa di una funzione, viene enunciata la condizione necessaria e sufficiente per l'invertibilità: una funzione $f : A \to B$ ammette inversa se e solo se è biunivoca, ossia quando ogni elemento di B è immagine di esattamente un elemento di A.

Può verificarsi, in generale, che per una funzione $y = f(x)$ un valore di y risulti essere l'immagine di più elementi x (anche infiniti) del dominio. In questo caso, per definire la funzione inversa, occorre limitare convenientemente il campo di variabilità della x. E' quanto succede per le quattro funzioni goniometriche elementari , y=sen$x$, $y = \cos x$, y = tg$x$, $y = \cot gx$.

Per poter determinare l'inversa della funzione y=sen$x$ occorre scegliere un'intervallo di variabilità della x in modo che, in corrispondenza dei valori di detto intervallo, y assuma una sola volta tutti i valori compresi tra –1 e +1. Tale intervallo può essere $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. In esso la funzione y = sen$x$ è invertibile e la sua inversa si chiama *arcoseno di y* (cioè *l'arco il cui seno è y*). In simboli si scrive:

$$x = \text{arcsen}y \qquad \text{con } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Il grafico nel piano cartesiano della funzione y = arcsen$x$ è riportato nella fig. 9.10.

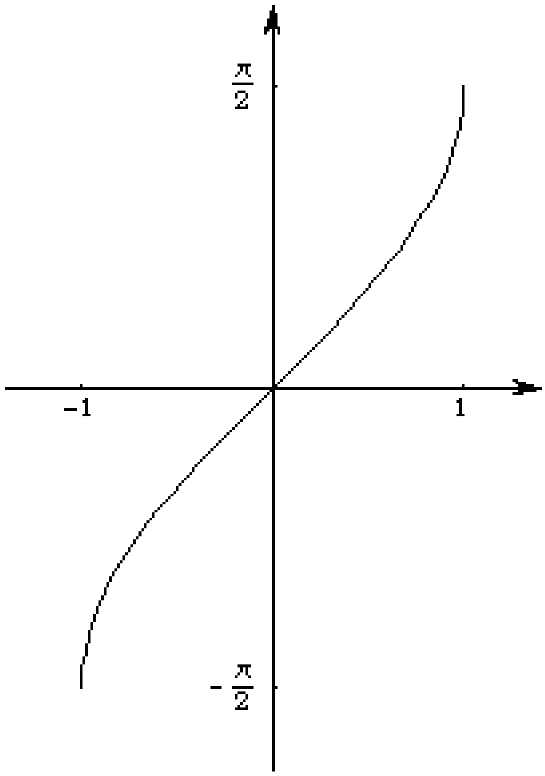


Fig. 9.10

Analogamente, l'inversa della funzione $y = \cos x$ è:

$$x = \arccos y \qquad \text{con } x \in [0, \pi],$$

il cui grafico è riportato in fig. 9.11;
l'inversa della funzione $y = \mathrm{tg}x$ è:

$$x = \mathrm{arctg}y \qquad \text{con } x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

il cui grafico è riportato in fig. 9.12.

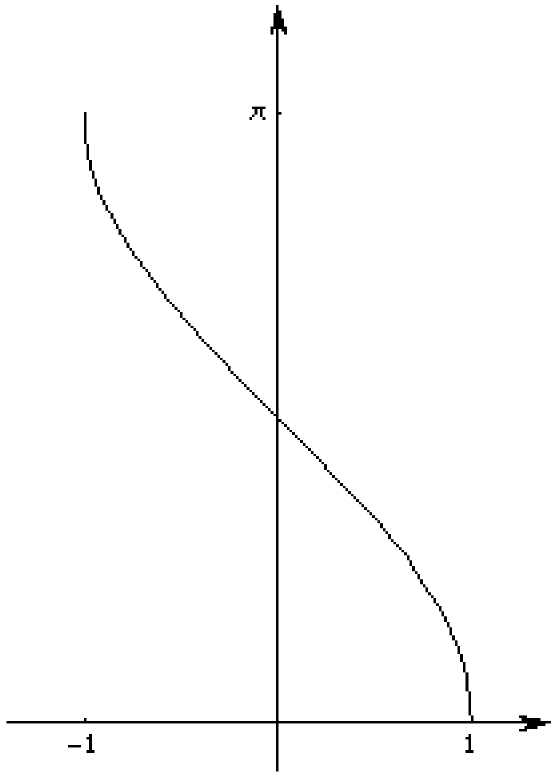


Fig. 9.11

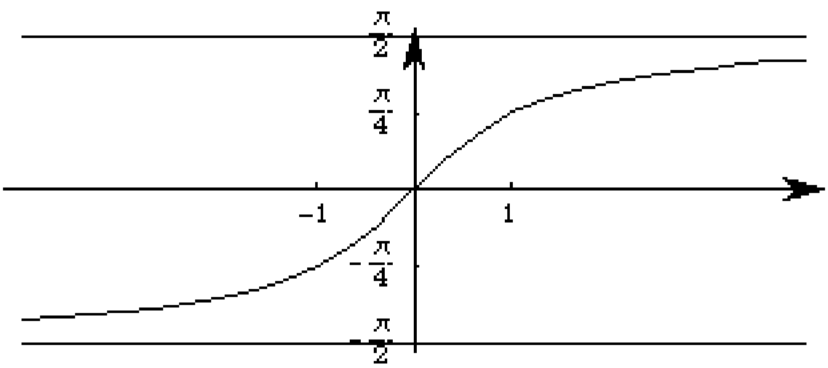


Fig. 9.12

9.6 Equazioni e disequazioni goniometriche

In questo paragrafo si risolvono alcune semplici equazioni e disequazioni che coinvolgono funzioni goniometriche, senza svolgere una trattazione dettagliata di tutti i tipi di equazioni e disequazioni: si esaminano, attraverso esempi, solo i casi più semplici e ricorrenti.

Le equazioni goniometriche più semplici, dette *equazioni fondamentali*, sono:

(9.32) $\operatorname{sen} x = a$

(9.33) $\cos x = a$

(9.34) $\operatorname{tg} x = a$

dove a è un qualsiasi numero reale. La loro risoluzione consiste, dal punto di vista geometrico, nel determinare i punti di intersezione tra il grafico del seno o del coseno o della tangente, con la retta di equazione $y = a$.

Per quanto riguarda le (9.32) e (9.33) si può osservare che (si vedano le figure 9.5 e 9.6):

- se $|a| > 1$ le equazioni non hanno soluzione, in quanto l'immagine delle funzioni seno e coseno è $[-1,1]$;

- se $|a| \leq 1$ le equazioni hanno infinite soluzioni: una di queste, indicata con α_1, è contenuta nell'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ per la funzione seno e nell'intervallo $[0, \pi]$ per la funzione coseno; una seconda soluzione, indicata con α_2, è simmetrica di α_1 rispetto alla retta $x = \pi/2$ per il seno: $\alpha_2 = \pi - \alpha_1$, mentre è simmetrica di α_1 rispetto alla retta $x = \pi$ per il coseno: $\alpha_2 = 2\pi - \alpha_1$; tutte le altre soluzioni si ottengono da α_1 e α_2 per periodicità e sono: $\alpha_1 + 2k\pi$, $\alpha_2 + 2k\pi$, con k intero qualsiasi.

L'equazione (9.34) ha una ed una sola soluzione, indicata con α, nell'intervallo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ (si veda la fig. 9.7) e tutte le altre soluzioni hanno la forma $\alpha + k\pi$, con k intero qualsiasi.

<u>Esempio 9.4</u>

Si consideri l'equazione:

$$\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}.$$

Consultando la tabella 2 del paragrafo 9.3, oppure facendo riferimento alla fig. 9.14, si ottiene che il valore $x = \pi/6$ soddisfa l'uguaglianza assegnata e, per simmetria, lo stesso vale per $x = \pi - \pi/6 = 5\pi/6$. Le infinite soluzioni dell'equazione proposta sono dunque, considerando la periodicità:

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{e} \quad x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \quad \text{con} \quad k \in \mathbf{Z}.$$

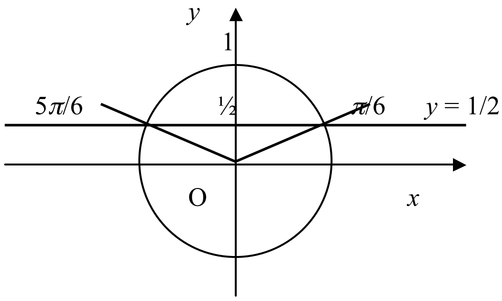


fig. 9.14

Esempio 9.5

Si consideri l'equazione:

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Consultando la tabella 2 del paragrafo 9.3, oppure facendo riferimento alla fig. 9.15, si ottiene che il valore $x = \pi/4$ soddisfa l'uguaglianza assegnata e, per simmetria, lo stesso vale per $x = 2\pi - \pi/4 = 7\pi/4$, ossia per $-\pi/4$ (considerando la periodicità del coseno). Le infinite soluzioni dell'equazione proposta sono dunque, considerando la periodicità:

$$x = \pm \frac{\pi}{4} + 2k\pi \qquad \text{con} \quad k \in \mathbf{Z}.$$

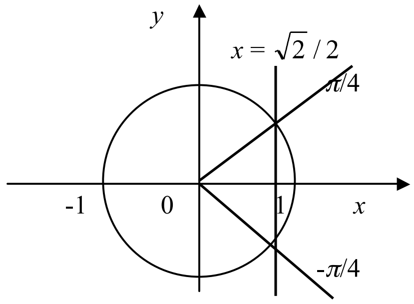


fig. 9.15

Esempio 9.6

Si consideri l'equazione:

$$\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,x - 1 = 0.$$

Essa è equivalente a:

$$\mathrm{tg}\,x = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

che è soddisfatta da $x = \pi/6$ (si consulti la tabella 2, oppure si ragioni sulla circonferenza goniometrica, utilizzando la definizione di tangente, in modo analogo agli esempi sopra, relativi a seno e coseno). Considerando la periodicità della funzione tangente, le infinite soluzioni dell'equazione proposta sono:

$$x = \frac{\pi}{6} + k\pi \quad \text{con} \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Altri tipi di equazioni elementari sono quelle contenenti l'uguaglianza tra seni, coseni o tangenti, come quella risolta nell'esempio seguente.

<u>Esempio 9.7</u>

Si consideri l'equazione:

$$\mathrm{sen}\,(3\,x - 75°) = \mathrm{sen}\,(x + 15°).$$

Affinché l'uguaglianza sia verificata deve risultare

$$3x - 75° = x + 15° + k360°$$

oppure

$$3x - 75° = 180° - (x + 15°) + k360°.$$

Dalle due uguaglianza sopra si ricava rispettivamente:

$$2x = 90° + k360° \text{ e quindi } x = 45° + k180°$$

e

$$4x = 240° + k360° \text{ e quindi } x = 60° + k90°.$$

Si considerano ora equazioni goniometriche non elementari, risolubili mediante l'applicazione di formule goniometriche esposte nel paragrafo 9.4.

<u>Esempio 9.8</u>

Si consideri:

$$\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,x + 2\,\mathrm{sen}\,x = 0.$$

Tale equazione è equivalente a:

$$\sqrt{3}\,\frac{\mathrm{sen}\,x}{\cos x} + \mathrm{sen}\,x = 0$$

la quale, sotto la condizione $\cos x \neq 0$ e quindi $x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, è a sua volta equivalente a

$$\sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,x + 2\,\mathrm{sen}\,x \cos x = 0.$$

Raccogliendo a fattor comune sen x, si ottiene:

$$\mathrm{sen}\,x\left(\sqrt{3} + 2\cos x\right) = 0$$

e quindi, applicando la legge dell'annullamento del prodotto:

$$\operatorname{sen} x = 0 \quad \text{o} \quad \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Le soluzioni dell'equazione proposta sono pertanto:

$$x = k\pi \quad , \quad x = \pm\frac{5}{6}\pi + 2k\pi \quad \forall k \in \mathbf{Z}.$$

Esempio 9.9

E' assegnata l'equazione:

$$2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos(\pi - x) + 1 = 0.$$

Applicando le relazioni che intercorrono tra le funzioni goniometriche di angoli associati, l'equazione si può scrivere nella forma:

$$-2\cos^2 x + 1 = 0,$$

da cui si ricava

$$\cos x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

e pertanto

$$x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \quad \forall k \in \mathbf{Z}.$$

Esempio 9.10

Si consideri l'equazione:

$$\cos 2x - 2\operatorname{sen} x = \cos^2 x.$$

Applicando le formule di duplicazione si ottiene:

$$\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x - 2\operatorname{sen} x = \cos^2 x$$

e quindi

$$\operatorname{sen}^2 x + 2\operatorname{sen} x = 0.$$

Raccogliendo a fattor comune sen x e applicando la legge dell'annullamento del prodotto si perviene alle due equazioni elementari:

$$\operatorname{sen} x = 0 \quad , \quad \operatorname{sen} x = -2$$

la prima delle quali ha le soluzioni $x = k\pi$, mentre la seconda è impossibile.

Esempio 9.11

Si consideri l'equazione:

$$\operatorname{sen} 6x + \operatorname{sen} 2x = \operatorname{sen} 4x.$$

Per le formule di prostaferesi si ha:

$$2\operatorname{sen} 4x \cos 2x = \operatorname{sen} 4x$$

e quindi

$$\operatorname{sen} 4x\,(2\cos 2x - 1) = 0.$$

Applicando la legge dell'annullamento del prodotto si ha poi:

$$\text{sen } 4x = 0 \ , \ \cos 2x = \frac{1}{2}.$$

Dalla prima uguaglianza si ottiene:

$$4x = k\pi \ \text{ e quindi } \ x = k\frac{\pi}{4} \ ;$$

dalla seconda:

$$2x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi \ \text{ e quindi } \ x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi$$

(dove k è un qualsiasi numero intero).

Si considerano ora *equazioni lineari omogenee in seno e coseno*, cioè equazioni del tipo:

(9.35) $$a \text{ sen } x + b \cos x = 0 \ , \ \text{con } a \neq 0 \text{ e } b \neq 0.$$

I valori $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ non sono soluzioni di questa equazione, in quanto, per tali valori, il coseno si annulla mentre il seno vale + 1 o - 1. Si può pertanto supporre $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ (e quindi $\cos x \neq 0$) e dividere ambo i membri dell'equazione per $\cos x$, senza pericolo di perdere soluzioni. Così facendo otteniamo la seguente equazione equivalente alla (9.35):

$$a \text{ tg } x + b = 0$$

facilmente riconducibile ad una equazione del tipo (9.34).

Esempio 9.12

Si consideri l'equazione:

$$\text{sen } x - \sqrt{3}\cos x = 0.$$

L'equazione è di tipo (9.35), perciò si procede dividendo entrambi i membri per $\cos x$ (che, come si è notato sopra è non nullo):

$$\text{tg } x = \sqrt{3}$$

la cui soluzione è:

$$x = \frac{\pi}{3} + k\pi \quad \forall k \in \mathbf{Z}.$$

L'equazione

(9.36) $$a \operatorname{sen}^2 x + b \operatorname{sen} x \cos x + c \cos^2 x = 0$$

è *omogenea di secondo grado in seno e coseno*. Se $a \neq 0$, i valori $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ non sono soluzioni di questa equazione, perciò possiamo dividere entrambi i membri di questa per $\cos^2 x$, senza perdere soluzioni, ottenendo un'equazione di secondo grado in tg x. Se invece $a = 0$, dividendo per $\cos^2 x$, si perdono le soluzioni $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$; in tal caso si deve quindi procedere diversamente, cioè evidenziare il fattore comune $\cos x$, poi applicare la legge dell'annullamento del prodotto.

Esempio 9.13

Si consideri l'equazione:

$$3 \operatorname{sen}^2 x + 2\sqrt{3} \operatorname{sen} x \cos x - 3\cos^2 x = 0 .$$

Poiché è del tipo (9.36) con $a = 3 \neq 0$, si dividono entrambi i membri per $\cos^2 x$, senza perdere soluzioni, ottenendo un'equazione di secondo grado:

$$3 \operatorname{tg}^2 x + 2\sqrt{3} \operatorname{tg} x - 3 = 0$$

che, risolta in tg x, fornisce:

$$\operatorname{tg} x = -\sqrt{3} \quad , \quad \operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

da cui

$$x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \quad , \quad x = \frac{\pi}{6} + k\pi .$$

Si dicono *equazioni lineari in seno e coseno* equazioni del tipo:

(9.37) $$a \operatorname{sen} x + b \cos x = c$$

con a, b, c numeri reali assegnati. Si suppone che i tre coefficienti a, b, c siano non nulli, per escludere i casi precedentemente trattati (essendo $c \neq 0$, la (9.37) è non omogenea).

Per risolvere la (9.37) si possono sostituire al posto di sen x e cos x le loro espressioni in $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ fornite dalle (9.29) del paragrafo 9.4 e valide per $x \neq \pi + 2k\pi$. Con tale sostituzione la (9.37) si trasforma in una equazione di secondo grado in $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. L'equazione considerata potrebbe però avere come soluzioni anche i valori, esclusi dalla trattazione precedente, $x = \pi + 2k\pi$: basta quindi sostituire tali valori nella (9.37) per costatare se, effettivamente, questo è vero (in tal caso la (9.37) deve risultare un'identità).

Esempio 9.14

Si consideri l'equazione:

$$\sqrt{3} \operatorname{sen} x - \cos x = -1 .$$

Si verifica facilmente che essa, di tipo (9.37), non è soddisfatta dai valori $x=\pi+2k\pi$, quindi tutte le soluzioni si ottengono sostituendo a sen x e cos x le loro espressioni in $\text{tg}\,\frac{x}{2}$, cioè risolvendo l'equazione equivalente:

$$\sqrt{3}\,\frac{2\,\text{tg}\,\frac{x}{2}}{1+\text{tg}^2\,\frac{x}{2}}-\frac{1-\text{tg}^2\,\frac{x}{2}}{1+\text{tg}^2\,\frac{x}{2}}=-1$$

da cui, dopo alcuni calcoli, si ottiene la seguente equazione di secondo grado in $\text{tg}\,\frac{x}{2}$:

$$\text{tg}^2\,\frac{x}{2}+\sqrt{3}\,\text{tg}\,\frac{x}{2}=0.$$

Si deducono quindi le due equazioni elementari:

$$\text{tg}\,\frac{x}{2}=0 \quad , \quad \text{tg}\,\frac{x}{2}=-\sqrt{3}$$

dalla prima delle quali si ricava:

$$\frac{x}{2}=k\pi \quad \text{ossia} \quad x=2k\pi \quad \text{con } k \text{ intero qualsiasi,}$$

mentre dalla seconda:

$$\frac{x}{2}=-\frac{\pi}{3}+k\pi \quad \text{ossia} \quad x=-\frac{2}{3}\pi+2k\pi \quad \text{con } k \text{ intero qualsiasi.}$$

Si dicono *disequazioni goniometriche fondamentali* disequazioni del tipo:

(9.38) $\quad \text{sen}\,x>a\,,\quad \cos x>a\,,\quad \text{tg}\,x>a$ [5]

nelle quali a rappresenta un assegnato numero reale.

Risolvere queste disequazioni significa determinare tutti i valori dell'incognita x per i quali la funzione goniometrica coinvolta risulta maggiore (minore, minore o uguale, maggiore o uguale) del numero a.

Per il procedimento di risoluzione si consiglia di seguire il metodo grafico che viene illustrato negli esempi che seguono.

<u>Esempio 9.15</u>

Si consideri la disuguaglianza:

$$\text{sen}\,x>\frac{1}{2}.$$

Si determinano innanzitutto le soluzioni positive e non superiori all'angolo giro dell'equazione goniometrica elementare

[5] Oppure quelle in cui, al posto del simbolo ">", compaiono i simboli: "<", o "≥", o "≤".

$$\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$$

che si dice associata alla disequazione assegnata. Queste soluzioni sono i valori

$$\frac{\pi}{6} \quad \text{e} \quad \frac{5}{6}\pi .$$

Si consideri poi la fig. 9.16 in cui sono rappresentate la circonferenza goniometrica e la retta di equazione $y = 1/2$. Indicati con B e C i punti di intersezione di tale retta con la circonferenza, gli angoli orientati $A\hat{O}B$ e $A\hat{O}C$ sono ampi, rispettivamente $\pi/6$ e $5\pi/6$. I punti P della circonferenza goniometrica che, congiunti con O, danno origine ad angoli $A\hat{O}P$ orientati positivamente e non maggiori di un angolo giro, per i quali il seno è maggiore di 1/2, sono quelli appartenenti all'arco $\overset{\frown}{BC}$ orientato positivamente. La disequazione proposta è quindi certamente soddisfatta per gli x che soddisfano:

$$\frac{\pi}{6} < x < \frac{5}{6}\pi$$

e, per la periodicità della funzione seno, tutte le soluzioni della disequazione sono i valori di x dei seguenti intervalli:

$$\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \quad \forall k \in \mathbf{Z} .$$

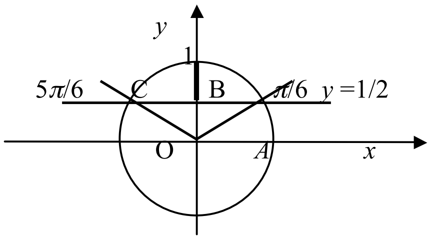


fig. 9.16

Esempio 9.16

Si consideri la disequazione:

$$\cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Le soluzioni positive e non superiori all'angolo giro dell'equazione associata

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

sono:

$$x = \frac{\pi}{6} \quad \text{e} \quad x = \frac{11}{6}\pi .$$

Nella fig. 9.17 sono rappresentate la circonferenza goniometrica e la retta $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$. I loro punti di intersezione B e C individuano gli angoli orientati $A\hat{O}B = \frac{\pi}{6}$ e $A\hat{O}C = \frac{11}{6}\pi$. I punti P della circonferenza goniometrica che, congiunti con O, individuano angoli $A\hat{O}P$ orientati positivamente e non superiori ad un angolo giro, per i quali il coseno è minore di $\frac{\sqrt{3}}{2}$, sono tutti quelli dell'arco positivo $\overset{\frown}{BC}$. I valori di x che soddisfano la condizione

$$\frac{\pi}{6} < x < \frac{11}{6}\pi$$

sono soluzioni della disequazione considerata, ed essendo $\cos x$ una funzione periodica di periodo 2π, tutte le soluzioni di questa sono i valori:

$$\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{11}{6}\pi + 2k\pi \qquad \forall k \in \mathbf{Z}.$$

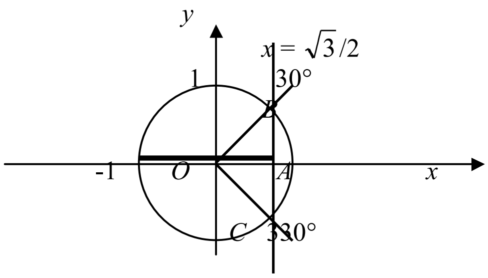


fig. 9.17

Esempio 9.17

Si consideri la disequazione non elementare:

$$\left|\mathrm{tg}\, x\right| < 1.$$

Applicando quanto esposto nel capitolo 8 relativamente alle disequazioni contenenti un solo valore assoluto, si ha che la disuguaglianza considerata è equivalente alla seguente:

$$-1 < \mathrm{tg}\, x < 1$$

a sua volta equivalente al sistema di disequazioni elementari:

$$\begin{cases} \mathrm{tg}\, x < 1 \\ \mathrm{tg}\, x > -1 \end{cases}.$$

Facendo riferimento alla fig. 9.18, si ottengono, graficamente, le seguenti soluzioni:

$$-\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{4} + k\pi .$$

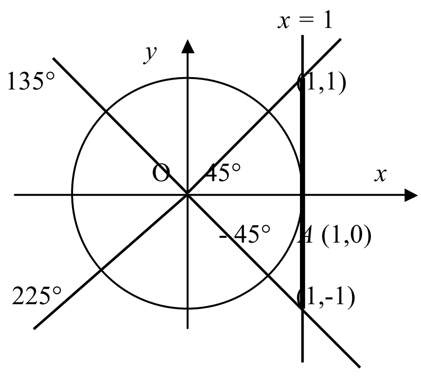


fig. 9.18

Esempio 9.18

Si consideri la disequazione non elementare:

$$2\cos^2 x - 5\cos x + 2 \geq 0 .$$

Applicando la teoria delle disequazioni algebriche di secondo grado esposta nel capitolo 7, la disequazione considerata è verificata per:

$$\cos x \leq \frac{1}{2} \quad \text{oppure} \quad \cos x \geq 2$$

che sono due disequazioni del tipo (9.38). La seconda di queste è impossibile, visto che il massimo valore che può assumere il coseno è 1, mentre la seconda è soddisfatta per i valori:

$$\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5}{3}\pi + 2k\pi \quad \forall k \in \mathbf{Z}$$

che costituiscono le soluzioni della disequazione assegnata.

9.7 Trigonometria: risoluzione dei triangoli rettangoli

Lo scopo della *trigonometria* è quello di voler studiare, per via algebrica, un triangolo, ossia di voler determinare le misure dei suoi sei elementi (tre lati e tre angoli), quando ne sono note soltanto tre, fra le quali sia compresa almeno quella di un lato. Tale studio, che viene denominato *risoluzione di un triangolo*, viene limitato, in questa trattazione, al caso del triangolo rettangolo, e realizzato attraverso l'uso di formule che legano le misure dei lati di questo, ai valori degli angoli.

Consideriamo un triangolo rettangolo (si faccia riferimento alla fig. 9.19) dove indichiamo con A, B, C i vertici, con a, b, c, rispettivamente, le misure dei lati opposti a tali vertici, con α, β, γ, rispettivamente, le misure positive degli angoli opposti ai lati suddetti.

Ricordando le definizioni di *seno*, *coseno*, *tangente*, *cotangente* di un angolo (relative ad una circonferenza con raggio qualsiasi e con centro coincidente con O, fornite nel paragrafo 9.2), possiamo scrivere:

(9.39) $$\text{sen}\,\beta = \frac{AC}{BC} = \frac{b}{a} \quad ; \quad \cos\beta = \frac{BA}{BC} = \frac{c}{a} \quad ; \quad \text{tg}\,\beta = \frac{AC}{BA} = \frac{b}{c}$$

e quindi:

(9.40) $$b = a\,\text{sen}\,\beta \quad ; \quad c = a\cos\beta \quad ; \quad b = c\,\text{tg}\,\beta$$

ossia, in un triangolo rettangolo, un cateto è uguale al prodotto dell'ipotenusa per il seno dell'angolo opposto o per il coseno dell'angolo acuto adiacente al cateto stesso, oppure un cateto è uguale al prodotto dell'altro cateto per la tangente dell'angolo ad esso opposto (cioè opposto al cateto che si vuole determinare).

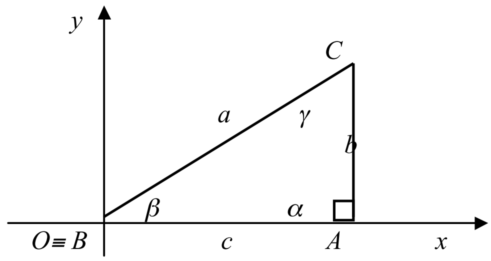


fig. 9.19

Inoltre, poiché $\alpha = \pi/2$, applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo di vertici A, B, C, si ottiene:

(9.41) $$a^2 = b^2 + c^2.$$

Utilizzando le (9.39), (9.40) e (9.41) e ricordando che gli angoli acuti di un triangolo rettangolo sono complementari (cioè la loro somma è uguale ad un angolo retto), è possibile risolvere un triangolo rettangolo (cioè determinarne tutti gli elementi incogniti) in ciascuno dei seguenti casi:

- se sono note la misura dell'ipotenusa e l'ampiezza di un angolo acuto;
- se sono note la misura di un cateto e l'ampiezza di un angolo acuto;
- se sono note le misure di un cateto e dell'ipotenusa;
- se sono note le misure dei due cateti,

visto che un angolo è sempre noto: $\alpha = \pi/2$.

Si illustra, tramite i due esempi seguenti, come si può risolvere un triangolo.

Esempio 9.19

Di un triangolo rettangolo si conoscono: la misura dell'ipotenusa a = 12 cm e l'angolo acuto $\beta = 20° = \pi/9$. Per risolvere il triangolo rettangolo considerato, si devono determinare i due cateti a e b, e l'angolo acuto γ. Considerando la fig. 9.19 e applicando le formule (9.39), si ha:

$$b = a \operatorname{sen}\beta = 12\text{cm} \times \operatorname{sen}(\pi/9) \approx 4{,}1042\text{cm}$$
$$c = a \cos\beta = 12\text{cm} \times \cos(\pi/9) \approx 11{,}2763\text{cm} .$$

L'angolo γ si può determinare nel modo seguente:

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{9} = \frac{7}{18}\pi .$$

Esempio 9.20

Si vuole risolvere il triangolo rettangolo avente: b = 2 m e $\gamma = 15° = \pi/12$.

Si utilizza la terza delle (9.39) per determinare il cateto c:

$$c = b \operatorname{tg}\gamma = 2\text{m} \times \operatorname{tg} 15° = 2\left(2 - \sqrt{3}\right)$$

(per la tg 15° il lettore consulti la tabella 2 del paragrafo 9.3).

Si determina quindi, per differenza, l'angolo acuto β:

$$\beta = 90° - 15° = 75°$$

e, utilizzando la (9.41), si ottiene la misura dell'ipotenusa a:

$$a = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4 + 4\left(2 - \sqrt{3}\right)^2}\,\mathrm{m} = 2\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)\mathrm{m}.$$